



**Zadania na XV Podkarpacki Konkurs Matematyczny
im. Franciszka Lejki
Poziom II**

(klasy drugie liceum i trzecie technikum)

Finał

18 kwietnia 2015 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. W trapezie ABCD, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| = a$, $|CD| = b$, poprowadzono dwa odcinki EF i GH równoległe do AB, których końce E i G oraz F i H należą odpowiednio do boków AD i BC. Oblicz długości tych odcinków wiedząc, że podzieliły one dany trapez na trzy figury o równych polach.
2. Wykaż, że jeżeli a, b, c są takimi liczbami nieujemnymi, że $a + b + c = 3$, to $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{3}{2}$.
3. Wykaż, że na czworokącie opisanym na kole można opisać koło wtedy i tylko wtedy, gdy cięciwy łączące punkty styczności przeciwległych boków czworokąta z kołem są prostopadłe.
4. Wyznacz wszystkie wartości wymierne parametru a , dla którego funkcja $f(x) = ax^2 + (a + 1)x + a - 1$ ma wszystkie miejsca zerowe całkowite.
5. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n , liczba $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$ jest całkowita.

Powodzenia!